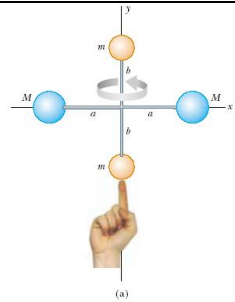


INSTYTUT FIZYKI

**WYDZIAŁ INŻYNIERII PRODUKCJI
I TECHNOLOGII MATERIAŁÓW
POLITECHNIKA CZĘSTOCHOWSKA**



**PRACOWNIA
MECHANIKI**



ĆWICZENIE NR M-5

WYZNACZANIE MOMENTU BEZWŁADNOŚCI

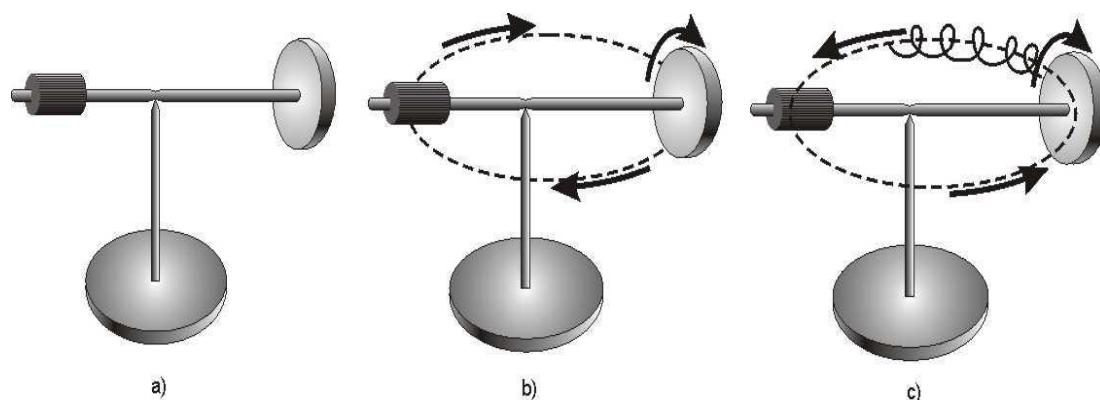
ŻYROSKOPU

I. Zagadnienia do przestudiowania

1. Bryła sztywna.
2. Równanie ruchu obrotowego bryły sztywnej.
3. Moment bezwładności punktu i bryły sztywnej, moment siły, moment pędu.
4. Żyroskop, bąk symetryczny i jego zastosowania, precesja.

II. Wprowadzenie teoretyczne

Żyroskop jest bryłą sztywną o symetrii obrotowej, mogącą wykonywać, dzięki specjalnej konstrukcji, ruch obrotowy wokół trzech wzajemnie prostopadłych osi. Oś bryły jest osią maksymalnego momentu bezwładności i jest swobodną, stabilną osią obrotu. Stanowi ją dźwignia dwustronna, gdzie na jednym ramieniu umieszczona jest wirująca tarcza (bąk), na drugim zaś ciężarek (rys. 1a). Gdy bąk jest nieruchomy, przesunięcie ciężarka powoduje, że żyroskop zachowuje się jak dźwignia zwykłej wagi (następuje obrót wokół osi poziomej). Gdy wprawimy bąk w szybki ruch obrotowy, równowaga pozostanie niezakłócona. Natomiast przesunięcie ciężarka z położenia równowagi, podczas ruchu bąka, powoduje, że dźwignia zmienia swoje położenie. Następuje obrót dźwigni wokół osi pionowej. Ta zmiana położenia osi wirowania żyroskopu pod wpływem działania siły zewnętrznej nazywana jest precesją (rys. 1b).



Rys. 1. Model żyroskopu

Zwykle zjawisku precesji towarzyszy zjawisko nutacji. Koniec osi żyroskopu, wykonując ruch precesyjny po kole równocześnie wykonuje on inny ruch okresowy po cykloidzie (rys. 1c).

Żyroskop został wynaleziony w 1852 r. przez Leona Foucaulta jako demonstracja zasady zachowania momentu pędu. Jest to urządzenie, służące do obserwacji obrotu ciała, na którym jest zainstalowane. Nazwa pochodzi od greckich słów „Scopeo” - obserwować. Drugim elementem wyrazu żyroskop jest greckie słowo „gyros” (czytane z francuska jako żyro), oznaczające obrót, wirowanie. Tak więc Foucault wymyślił przyrząd, który miał mu posłużyć do wykazania, że Ziemia wiruje. Dzisiaj żyroskopy stosuje się w urządzeniach do wskazywania wybranego kierunku używanych w samolotach, śmigłowcach,

statkach itp. Urządzenie zbudowane na tej zasadzie jest nazywane żyroskopem, żyrokomпасem lub komпасem żyroskopowym.

Najprostszym przykładem zjawiska precesji jest kula ziemską. Ziemia wykonuje ruch obrotowy wokół Słońca i jednocześnie ruch obiegowy wokół własnej osi. Na skutek oddziaływania grawitacyjnego Księżyca i Słońca (powstają pływy, czyli przy pływy i odpływy) i nierównomiernego rozmieszczenia masy Ziemi (spłaszczenie na biegunach) oś obrotu Ziemi nie może zachować stałego położenia w przestrzeni i zakreśla stożek. Oś obrotu Ziemi nie jest więc prostopadła do jej płaszczyzny obiegu wokół Słońca (ekliptyki), ale pochylona pod kątem ok. $23,5^\circ$. Skutkiem precesji Ziemi jest przesuwanie się gwiazd wzdłuż ekliptyki (pozornej drogi rocznego ruchu Słońca) z prędkością niemal jednego stopnia na 72 lata. Jednocześnie biegun północny zakreśla na niebie duży okrąg (o kącie rozwarcia $23,5^\circ$) i coraz to inna gwiazda staje się „gwiazdą polarną”, czyli gwiazdą znajdującą się w pobliżu osi obrotu Ziemi. Zakreślenie pełnego okręgu trwa 26 000 lat ($360^\circ \times 72$ lata).

Uproszczony opis ruchu żyroskopu

Ruch obrotowy bryły sztywnej opisuje II zasada dynamiki dla ruchu obrotowego. Moment siły \vec{M} działającej na ciało w ciągu pewnego czasu równy jest szybkości wektorowej zmiany momentu pędu (lub krętu)

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (1)$$

Moment pędu bryły danego punktu bryły \vec{L}_i w układzie związanym ze środkiem masy określa zależność

$$\vec{L}_i \equiv \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i) = \vec{r}_i \times \vec{p}_i \quad (2)$$

Bąk o momencie bezwładności I , wprawiony w ruch obrotowy z prędkością kątową ω , ma moment pędu

$$\vec{L} = \hat{I} \times \vec{\omega} \quad (3)$$

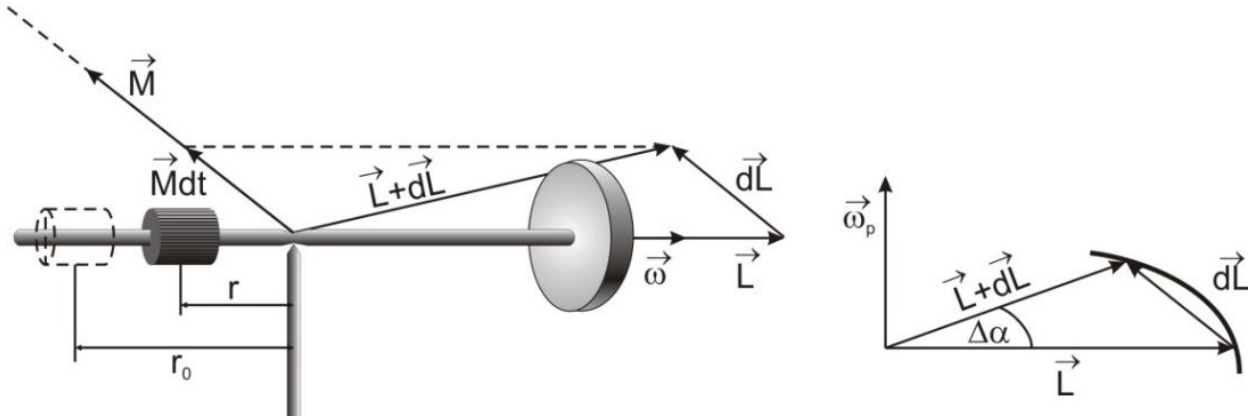
Ponieważ prędkość kątowa jest stała $\vec{\omega} = \text{const}$ ($\vec{M} = 0$, $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$), przesunięcie ciężarka z położenia równowagi \vec{r}_0 w położenie \vec{r} wywoła powstanie momentu siły \vec{M}

$$\vec{M} = m(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{g} \quad (4)$$

który wywoła zmianę momentu pędu żyroskopu

$$d\vec{L} = \vec{M} dt \quad (5)$$

Wektor $d\vec{L}$ ma kierunek wektora \vec{M} , jest więc prostopadły do wektora \vec{L} i nie zmienia jego wartości tylko jego kierunek (rys. 2).



Rys. 2. Rozkład momentów pędu i siły w żyroskopie

Żyroskop zacznie się obracać wokół swojej osi. Wektor momentu pędu zatacza swoim końcem okrąg o promieniu proporcjonalnym do wartości wektora \vec{L} . W czasie dt zakreśli on kąt $d\alpha$

$$d\alpha = \frac{dL}{L} \quad (6)$$

Wektor momentu pędu będzie zmieniał swój kierunek, obracając się wokół osi pionowej z prędkością kątową $\vec{\omega}_p$ ruchu precesyjnego

$$\vec{\omega}_p = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta t} = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{L} \frac{dL}{dt} \quad (7)$$

Wówczas moment siły równa się

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = L\vec{\omega}_p \quad (8)$$

Stąd zgodnie ze wzorem (4):

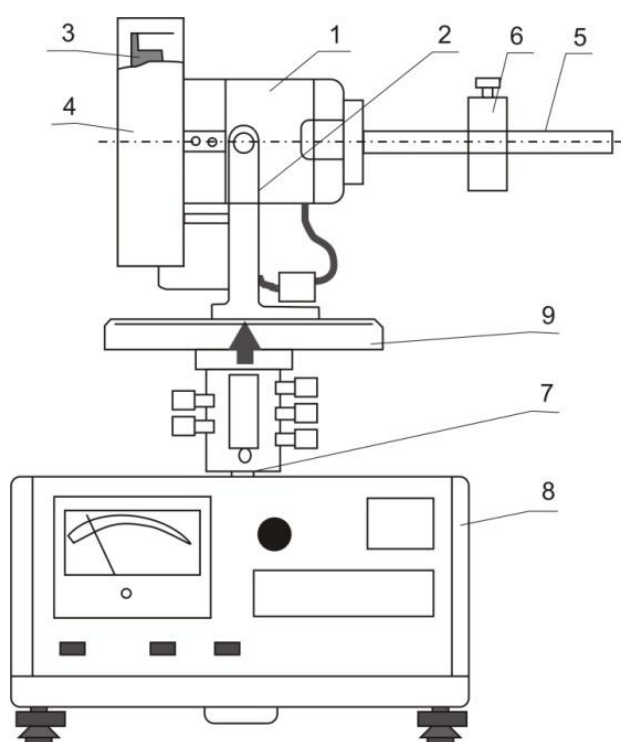
$$M = L\omega_p = I\omega\omega_p \quad (9)$$

możemy zatem napisać

$$\vec{M} = I\vec{\omega}_p \times \vec{\omega} \quad (10)$$

III. Zestaw pomiarowy

Żyroskop pomiarowy (rys. 3) stosowany w ćwiczeniu posiada tachometr prędkości obrotowej żyroskopu oraz układ fotoelektryczny umożliwiający pomiar prędkości kątowej precesji. Silnik elektryczny (1) umocowany jest w uchwycie (2), pozwalającym na ograniczony obrót w płaszczyźnie pionowej. Na wale silnika znajduje się koło zamachowe (3) w osłonie przezroczystej (4). Dźwignia (5) posiada nacięcia kalibrowane co 1 cm. Obciążnik (6) może przesuwać się wzdłuż dźwigni. Całość umieszczona jest na kolumnie (7). Na podstawie znajduje się układ pomiarowy (8) z tachometrem i czasomierzem cyfrowym. Na tarczy (9) znajdują się nacięcia co 5° , które zliczane są za pomocą czujnika fotoelektrycznego. Masa obciążnika wynosi 0,375 kg.



Rys. 3. Schemat zestawu pomiarowego

IV. Przebieg ćwiczenia

1. Włączyć sznur sieciowy układu pomiarowego do sieci zasilającej.
2. Wcisnąć przycisk **СЕТЬ** (SIEĆ), kontrolując, czy wszystkie wskaźniki mierników wskazują cyfrę zero, a także czy świeci się żarówka czujnika fotoelektrycznego.
3. Za pomocą nakrętek nóżek podstawy wypoziomować przyrząd.
4. Doprowadzić dźwignię żyroskopu do równowagi, przesuwając wzdłuż niej ciężarek. Po ustaleniu równowagi odczytać położenie równowagi r_0 .
5. Sprawdzić, czy pokrętko regulacji obrotów silnika n (REG ω) znajduje się w lewym skrajnym położeniu.

UWAGA: *Włączenie przyrządu do sieci, gdy pokrętło n znajduje się w innym położeniu, może spowodować przepalenie bezpieczników w obwodzie silnika*

- Nacisnąć przycisk **CBPOC** (Zliczanie). Ustawić prędkość obrotową około 6000 obr/min. Odczekać chwilę na ustalenie się obrotów.
- Przesunąć ciężarek o 2 cm w stosunku do położenia równowagowego. Wyzerować liczniki i uruchomić czasomierz cyfrowy (nacisnąć przycisk **CBPOC**), co spowoduje rozpoczęcie pomiaru. Wykonać pomiar dla kąta obrotu żyroskopu $\alpha = 50^\circ$ wokół osi pionowej zakreślonego w czasie t . Cyfrowy odczyt zmierzonych wartości następuje po naciśnięciu klawisza **CTOII** (STOP). Wartość kąta α w stopniach otrzymuje się, mnożąc przez 10 odczyt z górnego wyświetlacza, a czas pomiaru t w sekundach pokazuje dolny wyświetlacz.

UWAGA: *Przycisk **CTOII** należy nacisnąć tuż po wyświetleniu wartości kąta poprzedzającej zamierzoną wartość końcową, np. jeżeli chcemy, aby $\alpha = 50$, naciskamy przycisk **CTOII** po wyświetleniu $\alpha = 40$. Wciśnięcie przycisku **CBPOC** kasuje dane z poprzedniego pomiaru.*

- Podobne pomiary wykonać dla kilku innych położenia ciężarka.
- Po skończeniu pomiarów zmniejszyć obroty do zera i wyłączyć zasilanie przyrządu z sieci.

V. Tabele pomiarowe

TABELA 1. Tabela pomiarów

r_0 [m]	n [obr/min]	ω [rad/s]	$\Delta\omega$ [rad/s]	α [deg]	$\Delta\alpha$ [deg]	r [m]	Δr [m]	t [s]	Δt [s]

TABELA 2. Tabela wyników

ω_p [rad/s]	$\Delta\omega_p$ [rad/s]	I [kgm ²]	ΔI [kgm ²]	$\Delta I/I$

VI. Opracowanie ćwiczenia

1. Obliczyć prędkość kątową obrotów bąka ze wzoru

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} \quad [\text{rad/s}] \quad (11)$$

2. Obliczyć prędkość kątową precesji żyroskopu z zależności $\omega_p = \frac{\alpha}{t}$, kąt α wyrazić w radianach.

3. Korzystając z prawa precesji żyroskopu

$$\vec{M} = I(\vec{\omega}_p \times \vec{\omega}) \quad (12)$$

oraz zależności

$$\vec{M} = m g(\vec{r} - \vec{r}_0) \quad (13)$$

gdzie: \vec{M} - moment siły działającej na dźwignię żyroskopu, I - moment bezwładności wirnika i tarczy, m - masa ciężarka, otrzymujemy

$$\omega_p = \frac{m g}{I \omega} (r - r_0) \quad (14)$$

Skąd

$$I = \frac{m g}{\omega \omega_p} (r - r_0) \quad (15)$$

ostatecznie uwzględniając związek pomiędzy prędkością obrotową n i kątową ω , wyrażenie na wyznaczenie momentu bezwładności żyroskopu

$$I = \frac{30 m g}{\pi n \alpha} (r - r_0) t \quad (16)$$

VII. Rachunek błędów

1. Błąd $|\Delta I|$ obliczyć metodą różniczki zupełnej

$$|\Delta I| = \left| \frac{\partial I}{\partial r} \right| |\Delta r| + \left| \frac{\partial I}{\partial r_0} \right| |\Delta r_0| + \left| \frac{\partial I}{\partial t} \right| |\Delta t| + \left| \frac{\partial I}{\partial m} \right| |\Delta m| + \left| \frac{\partial I}{\partial \alpha} \right| |\Delta \alpha| \quad (17)$$

2. Do oszacowania niepewności bezwzględnej i względnej przyjąć $|\Delta \alpha| = 1^\circ = \dots \text{rad}$,

$$|\Delta m| = 0,001 \text{ kg}$$

3. Zaokrąglone wartości obliczonych wielkości wstawić do tabeli 2.
4. Przeprowadzić dyskusję uzyskanych wyników.

Literatura

1. Halliday D., Resnick R., Walker J., Fizyka, t. 2, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2003.
2. Lech J., Opracowanie wyników pomiarów w laboratorium podstaw fizyki, Wydawnictwo Wydziału Inżynierii Procesowej, Materiałowej i Fizyki Stosowanej PCz, Częstochowa 2005.
3. Massalski J., Massalska M., Fizyka dla inżynierów, Fizyka klasyczna, T. I, WNT, Warszawa 2005.
4. Piekara A., Mechanika ogólna, PWN, Warszawa 1975.
5. Respondowski R., Laboratorium z fizyki, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 1999.
6. Szczeniowski S., Fizyka doświadczalna, cz. 1, Mechanika i akustyka, PWN, Warszawa 1980.
7. Szydłowski H., Pracownia fizyczna wspomagana komputerem, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2003.
8. Wróblewski A.K., Zakrzewski J.A., Wstęp do fizyki, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1991.