



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt „Plan rozwoju Politechniki Częstochowskiej”
współfinansowany ze środków UNII EUROPEJSKIEJ w ramach EUROPEJSKIEGO FUNDUSZU SPOŁECZNEGO
Numer Projektu: POKL.04.01.01-00-59/08

INSTYTUT FIZYKI
WYDZIAŁ INŻYNIERII PRODUKCJI
I TECHNOLOGII MATERIAŁÓW
POLITECHNIKA CZĘSTOCHOWSKA



LABORATORIUM Z FIZYKI

ĆWICZENIE NR 5

BADANIE PRZEWODNICTWA ELEKTRYCZNEGO METALI



Politechnika Częstochowska, Centrum Promocji i Zastosowań Nauk Ścisłych
ul. Dąbrowskiego 73 pok. 178, 42-200 Częstochowa
tel./ fax. +343250324, e-mail: imi@imi.pcz.pl, <http://www.cns.pcz.pl>

I. Zagadnienia do przystudiowania

1. Prąd elektryczny, natężenie prądu, gęstość prądu, opór, opór właściwy, przewodność elektryczna prawo Ohma
2. Zależność oporu metali od temperatury
3. Klasyczna teoria przewodnictwa elektrycznego metali-teoria Drudego
4. Prawo Wiedemanna-Franza

II. Wprowadzenie teoretyczne

Opór elektryczny metali

Prąd elektryczny jest to uporządkowany ruch ładunków elektrycznych (nośników prądu) w polu elektrycznym. Ładunkami są elektrony w metalu, jony dodatnie i ujemne w cieczach i gazach, elektrony i dziury w półprzewodnikach. Od czasów Benjamina Franklina przyjmuje się kierunek przepływu prądu od potencjału wyższego (+) do niższego (-) czyli kierunek przepływu ładunków dodatnich. W metalach nośnikami ładunku są elektrony, prąd w metalu płynie więc w kierunku przeciwnym od potencjału niższego do wyższego.

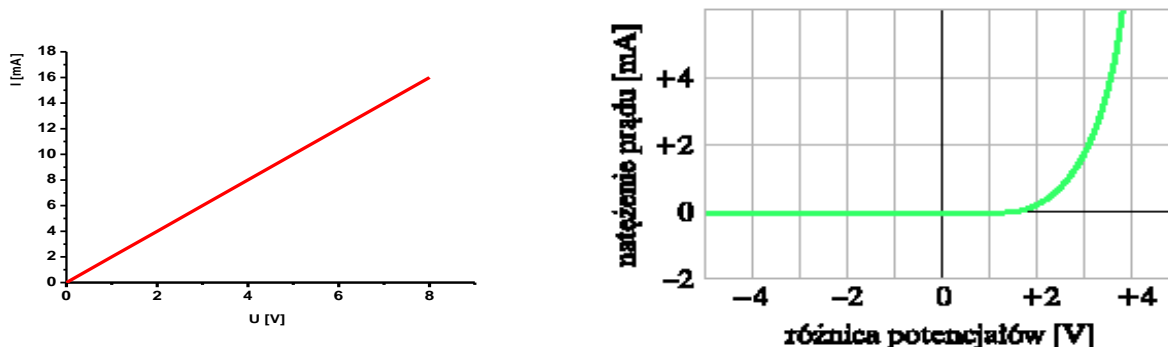
Pod wpływem napięcia U w przewodniku płynie prąd o natężeniu I . Natężenie prądu jest to ładunek przepływający przez przekrój przewodnika w jednostce czasu:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} [A] \text{ lub w postaci różniczkowej } I = \frac{dQ}{dt} \quad (1)$$

Jednostką natężenia prądu jest amper, jedna z siedmiu podstawowych jednostek układu SI. 1A jest to natężenie takiego prądu, który płynąc w dwóch nieskończenie długich przewodnikach prostoliniowych o zaniedbywalnie małym przekroju poprzecznym, odległych o 1m, powoduje działanie siły o wartości $2 \cdot 10^{-7}$ N na każdy metr długości przewodnika.

Prąd nazywamy stałym, jeżeli natężenie prądu nie zmienia się w czasie.

W roku 1826 niemiecki fizyk Ohm wykazał, że natężenie prądu płynącego w przewodniku metalicznym jest wprost proporcjonalne do napięcia przyłożonego do końców tego przewodnika. Jest to prawo Ohma. Dla przewodników spełniających prawo Ohma zależność natężenia od napięcia jest funkcją liniową jak to przedstawiono na rys. 1. Prawa Ohma nie spełnia np. dioda półprzewodnikowa ze złączem p-n (rys. 2). Jest to nieliniowy element obwodu elektrycznego.



Rys. 1. Zależność natężenia prądu od napięcia dla przewodnika spełniającego prawo Ohma (charakterystyka prądowo-napięciowa (rys. z lewej), ta sama zależność dla złącza p-n nie spełniającego prawa Ohma.

Stosunek napięcia do natężenia prądu dla danego przewodnika spełniającego prawo Ohma jest wielkością stałą i jest miarą oporu elektrycznego R (rezystancji) pod warunkiem, że temperatura jest stała:

$$R = \frac{U}{I} \quad (2)$$

Jednostką oporu jest ohm ($1\Omega = 1V/1A$). Opór przewodnika jest równy 1Ω , jeżeli przy napięciu $1V$ płynie prąd o natężeniu $1A$. Opór zależy od rozmiarów geometrycznych przewodnika, jest wprost proporcjonalny do długości przewodnika l , a odwrotnie proporcjonalny do jego przekroju poprzecznego S :

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (3)$$

gdzie ρ jest to opór właściwy (rezystywność) mierzony w $\Omega \cdot m$. Opór właściwy zależy od rodzaju materiału i od temperatury. Dla metali w temperaturze pokojowej ρ jest rzędu $10^{-8} \Omega \cdot m$ (np. dla miedzi $\rho = 1,69 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$), dla półprzewodników ρ jest rzędu $10^3 \Omega \cdot m$, a dla izolatorów rzędu $10^{10} - 10^{14} \Omega \cdot m$. Odwrotność oporu właściwego nazywa się przewodnictwem elektrycznym (konduktywnością):

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \quad (4)$$

Jednostką przewodnictwa elektrycznego jest siemens ($1 S = 1/(\Omega \cdot m)$).

Natężenie określa prąd płynący przez cały przekrój przewodnika. Aby scharakteryzować prąd w jakimś miejscu przewodnika wprowadza się gęstość prądu j , jako ładunek przepływający przez jednostkowy przekrój w jednostce czasu:

$$j = \frac{I}{S} = \frac{\Delta Q}{\Delta S} \quad (5)$$

Porównujemy wzory (2) i (3), mnożymy otrzymaną równość obustronnie przez I i dzielimy przez l :

$$\frac{U}{I} = \rho \frac{l}{S}$$

$$\frac{U}{l} = \rho \frac{I}{S} = \frac{I}{\sigma} j$$

$$E = \frac{I}{\sigma} j$$

$$j = \sigma E \quad (6)$$

Wzór (6) wyraża prawo Ohma w tzw. postaci mikroskopowej, że gęstość prądu jest wprost proporcjonalna do natężenia pola elektrycznego E.

Zależności oporu właściwego i oporu metalu od temperatury są opisane wzorami:

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha \Delta T), \quad (7)$$

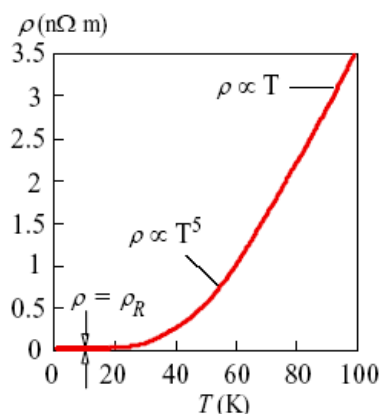
$$R = R_0 (1 + \alpha \Delta T) \quad (8)$$

ρ_0 , R_0 jest to opór właściwy i opór odniesienia w temperaturze zazwyczaj 20°C , α jest to temperaturowy współczynnik oporu, który otrzymuje się po przekształceniu wzoru (7):

$$\alpha = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0 \Delta T} \quad (9)$$

α jest to względny przyrost oporu przy wzroście temperatury o jeden stopień.

Zależności (7) i (8) nie są spełnione dla temperatur niskich (poniżej tzw. temperatury Debye'a, która dla miedzi i aluminium wynosi odpowiednio 335K i 419K). Widać to na rys. 2, który przedstawia zależność oporu właściwego od temperatury poniżej 100 K dla miedzi. W zakresie temperatur $\sim 20\text{-}60$ K ρ jest proporcjonalny do T^5 , a w temperaturze poniżej 20 K jest niezależny od temperatury i równy tzw. oporowi resztkowemu. Prawidłową zależność oporu właściwego od temperatury poniżej tzw. temperatury Debye'a można uzyskać na gruncie kwantowej fizyki ciała stałego.



Rys.2. Zależność oporu właściwego metalu od temperatury dla temperatur niższych od temperatury Debye'a.

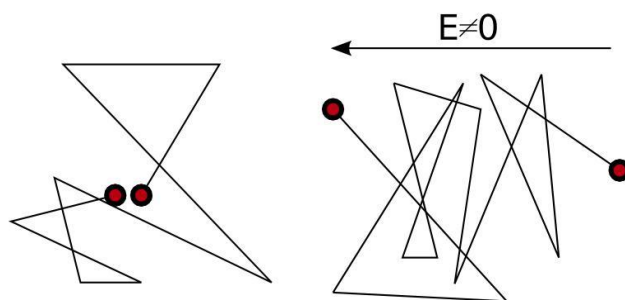
Klasyczny model przewodnictwa elektrycznego – model Drudego

Elektrony walencyjne (elektrony najbardziej oddalone od jądra) w atomach tworzących sieć krystaliczną metalu są słabo związane z atomem macierzystym, dlatego mogą poruszać się w całej objętości kryształu. Elektrony te nazywa się gazem elektronów swobodnych. Przyciąganie się dodatnich jonów i elektronów swobodnych stanowi wiązanie metaliczne. W klasycznej teorii przewodnictwa elektrycznego (sformułowanej przez fizyka niemieckiego Drudego w roku 1900) gaz elektronowy traktuje się jak gaz doskonały, do którego stosuje się teorię kinetyczno-molekularną gazów. Zgodnie z tą teorią elektrony posiadają rozkłady prędkości i energii opisane funkcjami rozkładu Maxwella-Boltzmann, a średnia energia kinetyczna elektronu wyraża się wzorem:

$$\langle E_k \rangle = \frac{3}{2} k_B T, \quad (10)$$

gdzie $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ jest stałą Boltzmann, a T temperaturą w skali Kelvina.

W nieobecności pola elektrycznego elektrony poruszają się ruchem bezwładnym, zderzają się z dodatnimi jonami metalu i są rozpraszane w różnych kierunkach jak to przedstawiono na rys. 3 (z lewej). Średnia droga swobodna $\langle \lambda \rangle$, czyli odległość między zderzeniami, jest porównywalna z odległością między jonami dodatnimi ($\sim 10 \text{ nm}$).



Rys. 3. Ruch bezwładny elektronów (z lewej), ruch bezwładny nakłada się na ruch w polu elektrycznym (z prawej).

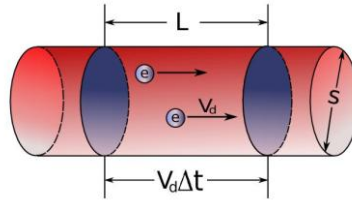
Drogę swobodną elektron przebywa w czasie τ zwanym czasem relaksacji, czyli:

$$\langle \lambda \rangle = \langle v \rangle \tau \quad (11)$$

Średnie przemieszczenie ruchu bezwładnego wszystkich elektronów wynosi zero i nie wnosi wkładu do przepływu prądu pomimo, że średnia prędkość elektronów podczas ruchu między zderzeniami obliczona na podstawie wzoru (10) w temperaturze $T=300 \text{ K}$ wynosi $1,1 \cdot 10^5 \text{ m/s}$.

Po przyłożeniu pola elektrycznego E ruch elektronów będzie złożeniem ruchu bezwładnego i ruchu wywołanego obecnością pola (rys. 3 z prawej). Elektrony będą się przemieszczać w kierunku przeciwnym do kierunku pola (nośniki dodatnie przemieszczają się zgodnie z kierunkiem pola) ze

średnią prędkością zwaną prędkością unoszenia lub dryfu v_d . Prędkość dryfu dla przewodników metalicznych jest rzędu 10^{-4} m/s i jest wiele rzędów wielkości mniejsza od prędkości średniej ruchu cieplnego (10).



Rys. 4. Fragment przewodnika w kształcie walca o przekroju poprzecznym S i długości Δl .

Na rys. 4 przedstawiono fragment przewodnika w kształcie walca o przekroju poprzecznym S i długości Δl , przez który płynie prąd o gęstości j pod wpływem pola elektrycznego o natężeniu E .

Porównując wzory (5) i (6) otrzymujemy: $j = \sigma E = \frac{\Delta Q}{\Delta t S}$ (12)

Ładunek ΔQ przepływający przez przekrój przewodnika w czasie Δt jest równy:

$$\Delta Q = ne \Delta l S = ne v_d \Delta t S \quad (13)$$

n jest liczbą elektronów w jednostce objętości (koncentracje elektronów swobodnych)

Wstawiając (12) do (11) otrzymujemy:

$$j = ne v_d \quad (14)$$

$$\sigma E = ne v_d$$

$$\sigma = ne \frac{v_d}{E} = ne \mu \quad (15)$$

$\mu = \frac{v_d}{E}$ nazywa się ruchliwością elektronów, oznaczającą prędkość dryfu nabytą w jednostkowym polu elektrycznym, n jest koncentracją elektronów swobodnych, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C jest ładunkiem elektronu.

Koncentracja elektronów swobodnych w metalach nie zależy od temperatury i jest kilka rzędów większa od koncentracji w półprzewodnikach. Przykładowo dla miedzi $n = 9 \cdot 10^{28}$ 1/m³, dla krzemu $n = 1 \cdot 10^{16}$ 1/m³

Pod wpływem pola elektrycznego elektron w metalu jest przyspieszany z przyspieszeniem

$$a = \frac{Ee}{m} \quad (16)$$

Przyspieszenie trwa do momentu następnego zderzenia, w którym elektron całkowicie traci swą energię kinetyczną, po czym proces przyspieszania zaczyna się od nowa. Przeciwny wpływ pola elektrycznego i zderzeń z jonami dodatnimi prowadzi do ruchu ze średnią prędkością dryfu v_d (analogia ze spadaniem kulki w ośrodku lepkiem, w którym po pewnym czasie, gdy siła lepkości zrównoważy ciężar kulki, ustala się prędkość spadania)

$$v_d = a\tau = \frac{Ee}{m}\tau \quad (17)$$

Wykorzystując zależność (13) otrzymujemy:

$$j = \frac{ne^2 E \tau}{m}$$

$$\sigma = \frac{j}{E} = \frac{ne^2 \tau}{m},$$

$$\rho = \frac{m}{ne^2 \tau} \quad (18)$$

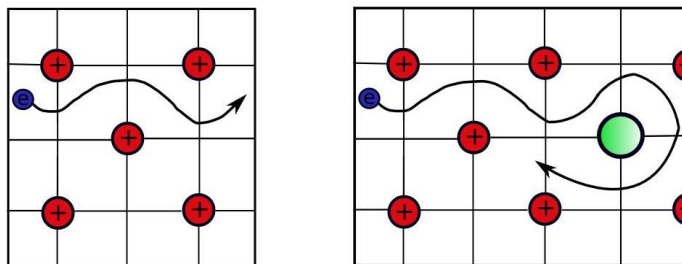
Porównując wzory (15) z (18) otrzymujemy wzór na ruchliwość elektronów:

$$\mu = \frac{e\tau}{m} \quad (19)$$

Przykładowo dla miedzi w temperaturze 300 K przewodnictwo elektryczne wynosi $\sigma = 6,45 \cdot 10^7$ S, czas relaksacji $\tau = 2,7 \cdot 10^{-14}$ s. Przewodnictwo elektryczne metalu zgodnie ze wzorem (18) zależy od koncentracji elektronów swobodnych i czasu relaksacji. Z dwóch czynników tylko τ zależy od temperatury, w przeciwieństwie do półprzewodników, dla których koncentracja również zależy od temperatury.

Metale są nie tylko dobrymi przewodnikami prądu, ale również i ciepła.

Klasyczna teoria gazu elektronów swobodnych nie wyjaśnia zależności temperaturowej przewodnictwa elektrycznego, cieplnego oraz faktu, że droga swobodna elektronów w metalu jest kilka rzędów wielkości większa od odległości pomiędzy jonami metalu. Prawidłowe wyjaśnienie wszystkich własności cieplnych i elektrycznych metali (również półprzewodników i izolatorów) dała dopiero mechanika kwantowa. W kwantowej teorii elektron należy traktować jak falę materii (tzw. falę de Broglie'a), która nie jest rozpraszana na dodatnich jonach idealnej sieci krystalicznej (rys. 5 z lewej) jak elektrony swobodne, tylko na niedoskonałościach sieci krystalicznej (na rys. 5 z prawej niedoskonałością jest wtrącenie oznaczone na zielono). Niedoskonałościami sieci krystalicznej są również drgania jonów wokół położenia równowagi, które są źródłem fal sprężystych stojących nazywanych fononami, dyslokacje, wakansy (puste miejsca w sieci), naprężenia.



Rys. 5 Schemat przechodzenia fali elektronowej przez idealny kryształ (lewy rysunek) i kryształ z wtrąceniem (prawy).

Zgodnie z mechaniką kwantową we wzorze na drogę swobodną (11), prędkość średnią ruchu cieplnego należy zastąpić tzw. prędkością Fermiego v_F . Elektrony przewodnictwa nawet w temperaturze 0 K posiadają energię, której największa, dozwolona przez prawa mechaniki kwantowej wartość (energia ruchu cieplnego w temperaturze 0K jest równa zero) nazywa się energią Fermiego E_F .

$$E_F = \frac{mv_F^2}{2} \rightarrow v_F = \sqrt{\frac{2E_F}{m}} \quad (20)$$

Prędkość Fermiego dla miedzi wynosi $1,6 \cdot 10^6$ m/s i jest ponad dziesięć razy większa od prędkości ruchu cieplnego. Czas relaksacji we wzorze (11) zależy również od koncentracji defektów lub fononów. W zależności od mechanizmu rozpraszania elektronów, który dominuje w określonym przedziale temperatur różna jest zależność czasu relaksacji, (więc i przewodnictwa elektrycznego oraz oporu właściwego) od temperatury. (rys. 2).

W przypadku metali elektrony przewodnictwa wnoszą również swój wkład w proces przewodnictwa ciepła. Dlatego pomiędzy przewodnictwem elektrycznym σ i cieplnym κ istnieje związek zwany prawem Wiedemanna-Franza, z którego wynika, że stosunek przewodnictwa cieplnego do przewodnictwa elektrycznego jest wprost proporcjonalny do temperatury

$$\frac{\kappa}{\sigma} = LT \quad (21)$$

Przewodnictwo cieplne κ jest to energia przenoszona w jednostce czasu przez jednostkową, ustawioną prostopadle powierzchnię przy spadku temperatury o 1K na odcinku 1m (jednostkowy gradient temperatury $\Delta T/\Delta x$). κ zależy od temperatury w niskich temperaturach.

Liczba Lorentza

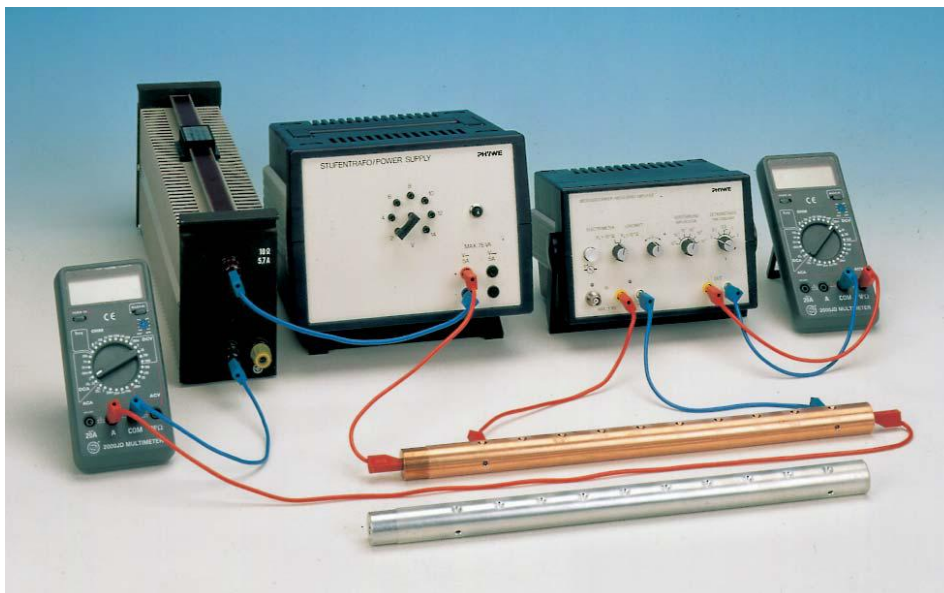
$$L = \frac{\pi^2}{3} \frac{k_B^2}{e^2} = 2,4 \cdot 10^{-8} \frac{W\Omega}{K^2} \quad (22)$$

III. Zestaw pomiarowy

Zasilacz (power supply), opornica suwakowa, wzmacniacz (amplifier), dwa multimetry cyfrowe, dwa pręty metalowe (miedziany i aluminiowy)

IV. Przebieg ćwiczenia

1. Zestawić obwód zgodnie z układem przedstawionym na rys. 6



Rys. 6. Układ pomiarowy

2. Na zasilaczu (power supply) ustawić napięcie 6 V.
3. Ustawić wzmacniacz w pozycjach: amplifier input-low drift, amplification- 10^4 , time constant- 0.
4. Na opornicy suwakowej suwak ustawić w pozycji max (maksymalny opór).
5. Multimetr cyfrowy (lewy na rys. 6) ustawić pokrętkiem na pomiar natężenia prądu stałego na zakresie 20 A.
6. Multimetr cyfrowy (prawy na rys. 6) ustawić pokrętkiem na pomiar napięcia stałego na zakresie 2 V.
7. Przesuwając suwak ostrożnie i powoli zmniejszać wartość oporu, ustawiając odpowiednie wartości napięcia.
8. Dla każdej wartości napięcia odczytać natężenie prądu
9. Pomiary z punktów 7-9 wykonać dla pręta miedzianego i aluminiowego
10. Obliczyć ΔU i ΔI na podstawie tabeli

Woltomierz prądu stałego			Amperomierz prądu stałego			
zakres	Rozdzielczość (dgt)	Dokładność ΔU	zakres	Rozdzielczość (dgt)	Dokładność ΔI	
200mV	100 μ V	$\pm 0,5\% + 3 \cdot \text{dgt}$	2mA	1 μ A	$\pm 0,8\% + 3 \cdot \text{dgt}$	
2V	1mV		20mA	10 μ A		
20V	10mV		200mA	100 μ A		$\pm 1,2\% + 4 \cdot \text{dgt}$
200V	100mV		20A	10mA		$\pm 2,0\% + 5 \cdot \text{dgt}$
1000V	1V	$\pm 1\% + 5 \cdot \text{dgt}$				

Ćwiczenie nr 5: Badanie przewodnictwa elektrycznego metali

Zapis dotyczący dokładności np $\pm 0,5\%$ +3-dgt oznacza, że należy obliczyć 0,5% wartości zmierzonej i dodać do wyniku pomnożoną przez 3 dokładność pomiaru na danym zakresie.

11. Wyniki wpisać do tabeli pomiarowej

V. Tabela pomiarowa

Cu				Al			
U ($\times 10^{-4}$) [V]	ΔU ($\times 10^{-4}$)	I [A]	ΔI	U($\times 10^{-4}$) [V]	ΔU ($\times 10^{-4}$)	I [A]	ΔI
0,03				0,08			
0,04				0,10			
0,05				0,12			
0,06				0,14			
0,07				0,16			
0,08				0,18			
0,09				0,20			
0,10				0,22			
0,12				0,24			
0,14				0,26			
0,16				0,28			
0,18				0,30			
0,20				0,32			
0,22				0,34			

VI. Opracowanie wyników pomiarów

Zależność natężenia od napięcia, czyli charakterystyka prądowo napięciowa dla metali zgodnie z prawem

Ohma jest liniowa:

$$I = \frac{1}{R}U$$

1. Korzystając z metody regresji liniowej wyznaczyć współczynniki a i b prostej $y = ax + b$ oraz błędy Δa i Δb tych współczynników. (a = 1/R, b w granicach popełnionego błędu jest równy zeru).

2. Obliczyć opór $R = \frac{l}{a}$ każdego pręta oraz przewodnictwo elektryczne $\sigma = \frac{l}{S \cdot R}$ przyjmując

$$l = 0,315 \text{ m}, S = 4,91 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2.$$

3. Na podstawie danych z tabeli wykreślić charakterystyki prądowo napięciowe dla miedzi i aluminium. Prostą narysować wykorzystując obliczone współczynniki a i b . Na wykres nanieść również obliczone ΔU i ΔI .
4. Obliczyć liczbę Lorentza $L = \frac{\kappa}{\sigma T}$ przyjmując wartości przewodnictwa cieplnego $\kappa_{Cu} = 384 \text{ W/Km}$ i $\kappa_{Al} = 220 \text{ W/Km}$ oraz temperaturę T w laboratorium.

VII. Rachunek błędów

1. Błąd oporu obliczyć ze wzoru

$$\Delta R = \left| \frac{\partial R}{\partial a} \right| \Delta a = \left| -\frac{I}{a^2} \right| \Delta a$$

2. Błąd przewodnictwa elektrycznego obliczyć ze wzoru

$$\Delta \sigma = \left| \frac{\partial \sigma}{\partial R} \right| \Delta R = \left| \frac{l}{S} \right| \left| -\frac{I}{R^2} \right| \Delta R$$

3. Błąd liczby Lorentza obliczyć ze wzoru

$$\Delta L = \left| \frac{\partial L}{\partial \sigma} \right| \Delta \sigma = \left| \frac{\lambda}{T} \right| \left| -\frac{I}{\sigma^2} \right| \Delta \sigma$$

4. Zapisać ostateczny wynik pomiaru liczby Lorentza w postaci

$$L = L_{\text{eksp}} \pm \Delta L$$

VII. Dyskusja wyników

Wartości liczby Lorentza dla Cu i Al powinny być w granicach błędów równe, a wartość teoretyczna $L = 2,4 \cdot 10^{-8} \text{ W}\Omega/\text{K}^2$ (wzór 22) powinna mieścić się w przedziale zapisanym w punkcie 4.

Literatura

- [1] R. Resnick, D. Halliday, J. Walker *Podstawy Fizyki, t.3 i 5*, PWN Warszawa, 2009.
- [2] Ch. Kittel *Wstęp do Fizyki Ciała Stałego*, PWN, 1999.
- [3] J. Lech *Opracowanie wyników pomiarów w I pracowni fizycznej*, Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, 2005.